

ГОУ ДПО «Ленинградский областной институт развития образования»
Факультет основного общего и среднего образования
Кафедра математики, информатики и ИКТ

ПРОЕКТНОЕ ЗАДАНИЕ

ТЕМА: РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

КПК: ФГОС ОО: Теория и методика обучения математике

**Выполнил: Наместникова Надежда Викторовна
учитель**

**МБОУ "СОШ "Сертоловский центр
образования № 2"**

Всеволожский район

**Руководитель: Голубева Светлана Александровна
старший преподаватель кафедры
математики, информатики и ИКТ**

Содержание

Пояснительная записка	2
Ход урока	4
Приложения	8

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методическая разработка урока алгебры для обучающихся 9 физико-математического класса «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля» составлена в соответствии с содержанием УМК по алгебре для общеобразовательных организаций «Алгебра 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, И. Е. Феоктистова, М. : Просвещение, 2018.

Тип урока: урок открытия новых знаний.

Цель урока: изучить, закрепить, систематизировать и обобщить алгебраические способы решения неравенств, содержащих модуль.

Задачи урока:

- **Обучающие:**

способствовать выработке умений решать неравенства с модулем; углубить знания обучающихся путем рассмотрения нестандартных способов решения.

- **Развивающие:**

способствовать развитию мыслительной деятельности, математической речи, умению говорить грамотно, слушать другого.

- **Воспитательные:**

воспитывать аккуратность ведения записей (на доске и в тетради).

Основные методы:

- **по виду источника информации:**

словесные (объяснение, беседа с обучающимися);
наглядные (иллюстрации);

- **по виду учебной деятельности:**

проблемно-поисковый (поиск решения);
метод проб и ошибок;
метод самостоятельной работы, контроля и самоконтроля.

Формы организации познавательной деятельности обучающихся: фронтальная, в парах, индивидуальная.

Система контроля:

- контроль учителя
- взаимоконтроль
- самоконтроль

Средства обучения: Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов Алгебра. Учебное пособие. 9 класс. Углубленный уровень. - М. : Просвещение, 2018, сеть Интернет.

Материально-техническое обеспечение: доска, компьютер, проектор, экран, карточки с раздаточным материалом.

Ожидаемые результаты формирования УУД:

Результатом формирования **познавательных** УУД будет являться умение ученика выделять эффективный способ решения, развитие вычислительных навыков, умение формулировать проблему, обосновывать этапы решения этой проблемы (работа в парах), проводить основные мыслительные операции (анализ, синтез, аналогия и т. д.), устанавливать причинно-следственные связи, преобразовывать схемы необходимые для решения.

Основным критерием сформированности **коммуникативных** УУД можно считать: желание вступать в контакт с окружающими, понимать и слушать других, сотрудничать (умение работать в парах, взаимоконтроль).

Критерием сформированности **регулятивных** действий может стать способность: планировать, контролировать и выполнять действие по заданному образцу, алгоритму, проявлять самостоятельность, уметь предотвращать ошибки.

Результатом формирования **личностных** УУД следует считать: адекватное понимание причин степени успешности, оценивание себя и других, формирование познавательной мотивации.

Для достижения планируемых результатов весь материал урока был разделён на три части: Что знали до этого урока? Что хотим узнать сегодня? Что узнали к концу урока?

Объем знаний заложен в программе, знания должны быть усвоены каждым обучающимся. Материал урока расширяет и углубляет знания и одновременно закладывает основу для дальнейшего изучения. Целостность знаний способствует общему развитию обучающегося. В соответствии с поставленными целями и содержанием материала урок строился по следующим этапам:

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний.
3. Выявление места и причины затруднения.
4. Построение проекта выхода из затруднения (цели и задачи урока).
Работа в парах с последующей проверкой в классе.
5. Знакомство с новыми теоремами.
Первичное закрепление (с комментариями)
6. Самостоятельная работа в группе (первичная проверка усвоенного материала).
7. Итог урока. Рефлексия.
8. Домашнее задание.

ХОД УРОКА

1. Организационный момент.

Пожелание доброго утра и удачного урока. Староста сообщает об отсутствующих.

2. Актуализация знаний.

Запишите, пожалуйста, в тетрадях дату и тему урока «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля». На карточках и на экране записаны неравенства с модулем. Классифицируйте их по методу решения. Работайте в парах.

Приложение 1

1) $|x| < 4$

5) $3|x - 2| + |5x - 4| < 10$

2) $|x - 3| < 7$

6) $|x^2 + 4x - 5| < x^2 - 5$

3) $|x + 3| > 5$

7) $|x^2 - 5x + 4| > 3x + 4$

4) $|x| > 3$

8) $|x^2 + 3x - 4| < |3x|$

Возможное распределение: 1 группа: № 1, 4; 2 группа: № 2, 3; 3 группа: № 5, 6, 7, 8.

Какой метод решения применим к каждой группе?

1 – системой (двойным неравенством) из геометрического смысла модуля; 2 – совокупностью из геометрического смысла модуля; 3 – методом промежутков (по определению модуля).

3. Выявление места и причин затруднения.

Некто предложил следующее распределение: 1 группа: № 1, 4, 6; 2 группа : №2, 3, 7; 3 группа : 5; 4 группа : 8. Почему? Проверим наблюдательность. 1 и 2 группы – по структуре записи (левая часть – модуль, знак неравенства – одинаковый); 3 группа – два модуля и число; 4 группа – только два модуля в разных частях неравенства.

4. Построение проекта выхода из затруднения.

Как иначе (не методом промежутков) можно решить неравенство № 8?

Обе части неравенства возвести в квадрат, так как они неотрицательны. Если нет ответа, то предложить прокомментировать примененное свойство $2 < 7$, то $4 < 49$.

Запишите в общем виде теорему

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 < (g(x))^2 \quad (A)$$

Решите неравенство 8) $|x^2 + 3x - 4| < |3x|$, при необходимости соседи по парте могут консультироваться. К доске выходит ученик, справившийся с заданием раньше других. Через проектор выводит свое решение на экран. Идет проверка решения. **Приложение 2.** Чем этот способ

решения неравенства данного типа рациональнее? Метод раскрытия модуля на промежутках предполагает решение совокупности **нескольких** систем. Применяя равносильность, решаем одно неравенство.

Теорему (А) можно оформить так: $|f(x)| - |g(x)| < 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$ (А1)

Приложение 3

Замечание. Обобщение теоремы (А): $|f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 \vee (g(x))^2$

Знак « \vee » означает один из знаков : $<$; $>$; \leq или \geq .

Решите неравенство № 8) $|x^2 + 3x - 4| < |3x|$, при необходимости соседи по парте могут консультироваться. К доске выходит ученик, справившийся с заданием раньше других. Через проектор выводит свое решение на экран. Идет проверка решения. Чем этот способ решения неравенства данного типа рациональнее? Метод раскрытия модуля на промежутках предполагает решение совокупности **нескольких** систем. Применяя равносильность, решаем одно неравенство.

5. Работа в парах с последующей проверкой.

Обратимся к первой группе неравенств. Прокомментируйте это объединение. Структура похожа, но правая часть неравенства № 6 – выражение с переменной, в других неравенствах – положительное число. А может у нас не хватает пока знаний для похожей схемы решения. Запишите в общем виде тип этого неравенства и предполагаемое равносильное неравенство или систему.

$$|f(x)| < g(x) \text{ (1) и } -g(x) < f(x) < g(x) \text{ (2) или } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

Какие неравенства называются равносильными?

Неравенства называются равносильными, если у них совпадают множества решений.

Если x_1 - решение неравенства (1), то получаем верное числовое неравенство. Продолжите, пожалуйста, в парах: доведите это рассуждение до логического конца. Те, кто имел затруднения, обратите на приведенное доказательство на экране. Демонстрация учеником.

1) Пусть x_1 – решение неравенства (1), то $|f(x_1)| < g(x_1)$ – верно $-g(x_1) < f(x_1) < g(x_1)$ – верно (из геометрического смысла модуля). Значит, x_1 – решение неравенства (2).

2) Самостоятельно докажите обратное утверждение. Взаимопроверка в парах.

Доказали ли вы равносильность? При утвердительном ответе необходимо вспомнить определение равносильных неравенств (множество решений может быть пусто). Учитель предлагает способ доказательства «от противного». Сам проводит на доске с привлечением рассуждения ребят с места. Доказательство обратного утверждения предлагается сделать самостоятельно с последующей проверкой в парах.

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \text{ (B)}$$

Приложение 4

Напишите в общем виде предполагаемую теорему (С), соответствующую второй группе неравенств.

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \text{ (С)}$$

Аналогично можно доказать эту теорему. **Приложение 5** Доказательство отнесите к домашней работе.

Замечание. Равносильность сохраняется для теорем (В) и (С), если знаки $<$, $>$ заменить соответственно знаками \leq , \geq .

.Сейчас воспользуйтесь этой теоремой (С) при решении неравенства 7) $|x^2 - 5x + 4| > 3x + 4$

Приложение 6 Работайте в парах. Тот, кто решит быстрее, выводит свое решение на экран. Идет проверка.

6. Самостоятельная работа. (Первичная проверка усвоенного материала)

Для самостоятельной работы на ваших столах лежат листочки с заданиями по вариантам и дополнительное задание **№9**. Подумайте о способе его решения.

$$\frac{|x^2 - 3x| - |x - 5|}{|x - 4| - |x + 8|} \leq 0 \text{ (9)}$$

Самостоятельная работа	
1 вариант	2 вариант
1) $ 2x - 3 \geq x + 1$	1) $ 3x + 2 \geq 2x + 3$
2) $ 3x + 2 < 2x + 3$	2) $ 2x - 3 < x + 1$

Приложение 7. Передайте ваши решения мне (с последней парты – на первую). Собирают работы. А теперь о неравенстве № 9. **Приложение 8.** Если в классе нет ответа, то учитель начинает объяснение. На одних и тех же множествах левые части неравенства (9) и неравенства (10) принимают значения одного знака, следовательно, (делает паузу) ...неравенство (9) равносильно неравенству (10). Решить это предлагается дома. Такого типа неравенства относятся к заданиям ЕГЭ 2 части.

7. Рефлексия.

Подводя итог, вернемся к предложенным вам неравенствам в самом начале урока. Был ли этот урок вам полезен? Кому было легко работать? Кто испытал трудности? Что нового мы сегодня узнали? Кто на ваш взгляд внес больший вклад в работу?

8. Домашнее задание.

На ваших столах листочки с домашним заданием. Те , кто не выполнил задание № 9, постарайтесь дома разобраться **Приложение 9. 10.**

Использованные источники

- Алгебра. 9 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций: углубленный уровень / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков и др. – М.: Просвещение, 2018
- Алгебра. 9 класс. Дидактические материалы / И. Е. Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2018
- <http://festival.1september.ru>
- <http://pedsovet.su/>

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

- | | |
|------------------|-------------------------------|
| 1) $ x < 4$ | 5) $3 x - 2 + 5x - 4 < 10$ |
| 2) $ x - 3 < 7$ | 6) $ x^2 + 4x - 5 < x^2 - 5$ |
| 3) $ x + 3 > 5$ | 7) $ x^2 - 5x + 4 > 3x + 4$ |
| 4) $ x > 3$ | 8) $ x^2 + 3x - 4 < 3x $ |

Приложение 2

$$8) |x^2 + 3x - 4| < |3x| \quad (x^2 + 3x - 4)^2 < (3x)^2$$

$$(x^2 + 3x - 4 - 3x)(x^2 + 3x - 4 + 3x) < 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 4) < 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 6x - 4 = 0, D_1 = 13 \\ x_1 = -3 - \sqrt{13} \quad x_2 = -3 + \sqrt{13} \end{array} \right.$$

$$(x - 2)(x + 2)(x + 3 + \sqrt{13})(x + 3 - \sqrt{13}) < 0$$

Решая методом интервалов, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -3 - \sqrt{13} < x < -2 \\ -3 + \sqrt{13} < x < 2 \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } (-3 - \sqrt{13}; -2) \cup (-3 + \sqrt{13}; 2)$$

Приложение 3

$$|f(x)| - |g(x)| < 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0 \quad (\text{A1})$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} |f(x)| - |g(x)| < 0 &\Leftrightarrow |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 < (g(x))^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) < 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0 \end{aligned}$$

Приложение 4

$$|f(x)| < g(x) \quad (1) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \quad (2) \quad (B)$$

Доказательство.

1. Пусть x_1 – решение (1), то $|f(x_1)| < g(x_1)$ – верно, из геометрического смысла модуля и $-g(x_1) < f(x_1) < g(x_1)$ – верно. Значит, x_1 – решение (2).
2. Если x_1 – решение (2), то $-g(x_1) < f(x_1) < g(x_1)$ – верно, то из геометрического смысла модуля и $|f(x_1)| < g(x_1)$ – верно. Следовательно, x_1 – решение (1).
3. Пусть (1) не имеет решений. Докажем, что (2) не имеет решений методом «от противного».
Если x_1 – решение (2), то из пункта 2) x_1 – решение (1)
Получили противоречие. Значит, предположение неверно, (2) не имеет решения.
4. Если (2) не имеет решений, то и (1) не имеет решений.
Доказательство аналогично пункту 3).

Приложение 5

$$|f(x)| > g(x) \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \quad (2) \quad (C)$$

Доказательство.

- 1) Пусть x_1 – решение (1), то $|f(x_1)| > g(x_1)$ – верно. Из геометрического смысла модуля $\begin{cases} f(x_1) > g(x_1) \\ f(x_1) < -g(x_1) \end{cases}$ – верно, то есть x_1 – решение (2).
- 2) Пусть x_1 – решение (2), то $\begin{cases} f(x_1) > g(x_1) \\ f(x_1) < -g(x_1) \end{cases}$ – верно. Из геометрического смысла модуля $|f(x_1)| > g(x_1)$ верно. x_1 – решение (1)
- 3) Пусть (1) не имеет решений. Докажем методом «от противного», что (2) не имеет решений. Если x_1 – решение (2), то из пункта 2) x_1 – решение (1), но это противоречит предположению. Значит, (2) не имеет решений.
- 4) Если $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$ (2) не имеет решений, то $|f(x)| > g(x)$ (1) не имеет решений, доказательство аналогично пункту 3).

Приложение 6

$$7) \quad |x^2 - 5x + 4| > 3x + 4$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 3x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 < -3x - 4 \\ x(x - 8) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x > 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2x + 8 > 0 \\ \text{при } \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$$

Приложение 7

Решение самостоятельной работы	
1 вариант	2 вариант
<p>1) $2x - 3 \geq x + 1$</p> $\begin{cases} 2x - 3 \geq x + 1 & \left[x \geq 4 \right. \\ 2x - 3 \leq -x - 1 & \left. x \leq \frac{2}{3} \right] \end{cases}$ <p>Ответ: $(-\infty; \frac{2}{3}] \cup [4; +\infty)$</p> <p>2) $3x + 2 < 2x + 3$</p> $\begin{cases} 3x + 2 < 2x + 3 & \left\{ x < 1 \right. \\ 3x + 2 > -2x - 3 & \left. x > -1 \right\} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ <p>Ответ: $(-1; 1)$</p>	<p>1) $3x + 2 \geq 2x + 3$</p> $\begin{cases} 3x + 2 \geq 2x + 3 & \left[x \geq 1 \right. \\ 3x + 2 \leq -2x - 3 & \left. x \leq -1 \right] \end{cases}$ <p>Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$</p> <p>2) $2x - 3 < x + 1$</p> $\begin{cases} 2x - 3 > -x - 1 & \left\{ x > \frac{2}{3} \right. \\ 2x - 3 < x + 1 & \left. x < 4 \right\} \\ \frac{2}{3} < x < 4 \end{cases}$ <p>Ответ: $(\frac{2}{3}; 4)$</p>

Приложение 8

<p>№ 9.</p> $\frac{ x^2 - 3x - x - 5 }{ x - 4 - x + 8 } \leq 0 \quad (9)$ <p>Решение.</p> $\frac{ x^2 - 3x - x + 5 }{ x - 4 - x + 8 } \leq 0 \quad \frac{(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x + 5)}{(x - 4 - x - 8)(x - 4 + x + 8)} \leq 0 \quad (10)$ $\frac{(x - 5)(x + 1)}{-24(x + 2)} \leq 0, \quad x^2 - 2x + 5 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}$ <p>Решая неравенство методом интервалов, получаем:</p> $\begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$ <p>Ответ: $(-2; -1] \cup [5; +\infty)$</p>
--

Приложение 9

Домашнее задание. П. 17, знать доказательства теорем о равносильности неравенств. Письменно доказать теорему (С), Решить № 345(а, в), 347(в, г), 350(б, г).

№ 345(а, в)

а) $|x^2 + 4x - 5| < x^2 - 5$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 < x^2 - 5 \\ x^2 + 4x - 5 > -x^2 + 5 \end{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x - 5 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{6}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6}) > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 1 - \sqrt{6} \\ x > 1 + \sqrt{6} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$x < 1 - \sqrt{6}$$

Ответ: $(-\infty; 1 - \sqrt{6})$

в) $|x^2 - 5x + 4| > 3x + 4$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 3x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 < -3x - 4 \end{cases} \begin{cases} x(x - 8) > 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x > 8 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 8 = 0, \\ D_1 = -7, \\ x^2 - 2x + 8 > 0 \text{ при } \forall x \in R, \\ \text{решение (1): } \emptyset \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$

№ 347 (в, г)

в) $|x^2 - 3x + 2| < |3x - 2|$

$$(x^2 - 3x + 2 - (3x - 2))(x^2 - 3x + 2 + 3x - 2) < 0$$

$$x^2(x^2 - 6x + 4) < 0$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$D_1 = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{5}$$

$$x^2(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5}) < 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ (x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5}) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$$

Ответ: $(3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5})$

г) $|x^2 - x| > |x - 1|$

$$(x^2 - x - (x - 1))(x^2 - x + x - 1) > 0$$

$$(x - 1)^2(x - 1)(x + 1) > 0$$

$$(x-1)^3(x+1) > 0 \quad \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

№ 350(б, г)

$$\begin{aligned} \text{б) } x^2 + |x-3| - 9 < 0 \quad & |x-3| < 9 - x^2 \quad \begin{cases} x-3 < 9 - x^2 \\ x-3 > x^2 - 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} & \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ x_1 = -4, x_2 = 3 \\ x^2 - x - 6 = 0 \\ x_1 = 3, x_2 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x+4)(x-3) < 0 \\ (x-3)(x+2) < 0 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем

$$\begin{cases} -4 < x < 3 \\ -2 < x < 3 \end{cases} \quad -2 < x < 3$$

Ответ: $(-2; 3)$

$$\text{г) } 2x^2 - 7|x-1| + 3 < 0 \quad 7|x-1| > 2x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x-7 > 2x^2+3 \\ 7x-7 < -2x^2-3 \end{cases} & \begin{cases} 2x^2-7x+10 < 0 \\ 2x^2+7x-4 < 0 \end{cases} \\ \left. \begin{aligned} 2x^2-7x+10 &= 0 \\ D &= -31 < 0 \\ 2x^2-7x+10 &> 0 \\ \text{при } \forall x \in R \\ 2x^2+7x-4 &= 0 \\ x_1 &= -8, x_2 = 0,5 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 2(x+8)(x-0,5) &< 0 \\ -8 &< x < 0,5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Ответ: $(-8; 0,5)$